

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 30.11.2024

ЮНИОРЫ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дано натуральное число n . Вещественные числа x_1, x_2, \dots, x_n таковы, что $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\sum_{k=1}^n \left| x_k - \sum_{i=1}^{k-1} x_i \right|.$$

2. Верно ли, что для любого $n > 100500$ на плоскости можно расположить n квадратов со сторонами $1, 2, 3, \dots, n$ так, что их стороны параллельны осям координат, квадраты пересекаются только по вершинам, и для любого квадрата A существует ровно два других квадрата, имеющих с A общую вершину?

3. Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Отрезки AN и DM пересекаются в точке E . На стороне BC отмечена точка F так, что четырехугольник $MENF$ — вписанный. Прямая AD вместе с лучами FM и NE образуют треугольник Δ_1 , а вместе с лучами ME и FN — треугольник Δ_2 . Докажите, что описанные окружности треугольников Δ_1 и Δ_2 касаются.

4. Назовём число безнулёвым, если в его десятичной записи нет нулей, в противном случае, назовём его нулёвым. Пусть a_n и b_n — количество нулёвых и безнулёвых чисел от 1 до n . Верно ли, что при любом натуральном k существует n , для которого $a_n/b_n = k$?

5. 2024 одинаковые книги разложены по нескольким стопкам. Андрею можно проводить следующие операции: если в каждой стопке хотя бы k книг, то он может забрать из каждой стопки по k книг и разложить все взятые книги на k равных новых стопок (при разных операциях k могут быть разными). При каком наибольшем N Андрей всегда сможет получить такими операциями хотя бы N различных распределений книг по стопкам, с какого бы распределения он ни начинал? (Распределения считаются различными, если найдется такое t , что стопок из t книг в них не поровну.)

6. Алиса и Эльдар играют в игру. В начале на доске написаны 5000 нулей и 5000 единиц. За один ход можно стереть с доски два числа и записать вместо них на доску их среднее арифметическое. Алиса делает 3000 ходов подряд, затем Эльдар делает ходы, пока на доске не останется всего два числа. Если эти два числа равны, Эльдар выигрывает, в противном случае выигрывает Алиса. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

7. Дано натуральное число n . При каком наибольшем k можно покрасить клетки доски $n \times n$ в k цветов таким образом, что для любого цвета A среди всех соседей по стороне у клеток, покрашенных в цвет A , в совокупности встречаются клетки не более, чем двух различных цветов, отличных от A ?

8. Окружность ω_a проходит через ортоцентр H остроугольного треугольника ABC , основание высоты, опущенной на сторону BC , и точку, диаметрально противоположную A на окружности (ABC) . Докажите, что вместе с окружностями ω_b и ω_c , которые определяются аналогично, окружность ω_a имеет общую точку, отличную от точки H .

9. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC отмечены точки D , E и F соответственно, а на отрезке DE выбрана точка X . Отрезки AX, CX, DE, DF, EF, XF делят треугольник ABC на девять частей. Какое наибольшее количество из них может быть площади 1?

10. Дано натуральное число n . На большой гирлянде висит $2n + 1$ лампочка. Каждую секунду некоторые лампочки загораются, а некоторые — гаснут. Дима наблюдает за гирляндой и записывает, сколько лампочек горит. Он заметил, что если в данный момент горит k лампочек, то к следующей секунде ровно k лампочек изменяют свое состояние. Дима наблюдал за гирляндой t секунд и записал t попарно различных чисел. Найдите наибольшее возможное значение t (ответ может зависеть от n).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 30.11.2024

ЮНИОРЫ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дано натуральное число n . Вещественные числа x_1, x_2, \dots, x_n таковы, что $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\sum_{k=1}^n \left| x_k - \sum_{i=1}^{k-1} x_i \right|.$$

2. Можно ли расположить на плоскости 126 квадратов со сторонами $1, 2, 3, \dots, 126$ так, что их стороны параллельны осям координат, квадраты пересекаются только по вершинам, и для любого квадрата A существует ровно два других квадрата, имеющих с A общую вершину?

3. Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Отрезки AN и DM пересекаются в точке E . На стороне BC отмечена точка F так, что четырехугольник $MENF$ — вписанный. Прямая AD вместе с лучами FM и NE образуют треугольник Δ_1 , а вместе с лучами ME и FN — треугольник Δ_2 . Докажите, что описанные окружности треугольников Δ_1 и Δ_2 касаются.

4. Назовём число безнулёвым, если в его десятичной записи нет нулей, в противном случае, назовём его нулёвым. Пусть a_n и b_n — количество нулевых и безнулевых чисел от 1 до n . Верно ли, что при любом натуральном k существует n , для которого $a_n/b_n = k$?

5. Натуральные числа a , b и n таковы, что $ab(a+b)^{n-1}$ делится на $a^n + b^n$. Докажите, что если a и n чётны, а b нечётно, то $a^n + b^n$ делится на $(n+1)$ -ю степень некоторого простого числа.

6. Алиса и Эльдар играют в игру. В начале на доске написаны 5000 нулей и 5000 единиц. За один ход можно стереть с доски два числа и записать вместо них на доску их среднее арифметическое. Алиса делает 2500 ходов подряд, затем Эльдар делает ходы, пока на доске не останется всего два числа. Если эти два числа равны, Эльдар выигрывает, в противном случае выигрывает Алиса. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

7. Дано натуральное число n . При каком наибольшем k можно покрасить клетки доски $n \times n$ в k цветов таким образом, что для любого цвета A среди всех соседей по стороне у клеток, покрашенных в цвет A , в совокупности встречаются клетки не более, чем двух различных цветов, отличных от A ?

8. Окружность ω_a проходит через ортоцентр H остроугольного треугольника ABC , основание высоты, опущенной на сторону BC , и точку, диаметрально противоположную A на окружности (ABC) . Докажите, что вместе с окружностями ω_b и ω_c , которые определяются аналогично, окружность ω_a имеет общую точку, отличную от точки H .

9. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC отмечены точки D , E и F соответственно, а на отрезке DE выбрана точка X . Отрезки AX, CX, DE, DF, EF, XF делят треугольник ABC на девять частей. Какое наибольшее количество из них может быть площади 1?

10. Дано натуральное число n . На большой гирлянде висит $2n + 1$ лампочка. Каждую секунду некоторые лампочки загораются, а некоторые — гаснут. Дима наблюдает за гирляндой и записывает, сколько лампочек горит. Он заметил, что если в данный момент горит k лампочек, то к следующей секунде ровно k лампочек изменяют свое состояние. Дима наблюдал за гирляндой t секунд и записал t попарно различных чисел. Найдите наибольшее возможное значение t (ответ может зависеть от n).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 30.11.2024

ЮНИОРЫ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Пусть p, q — вещественные числа такие, что квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет вещественные корни x_1 и x_2 . Оказалось, что p и q отличаются на 1, а также x_1 и x_2 отличаются на 1. Докажите, что числа p, q, x_1, x_2 — целые.
2. Можно ли расположить на плоскости 126 квадратов со сторонами $1, 2, 3, \dots, 126$ так, что их стороны параллельны осям координат, квадраты пересекаются только по вершинам, и для любого квадрата A существует ровно два других квадрата, имеющих с A общую вершину?
3. Окружность ω , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Точка D диаметрально противоположна точке B_1 . Отрезки AD и CD вторично пересекают окружность ω в точках E и F . Оказалось, что прямая EF проходит через середину отрезка A_1B_1 . Докажите, что эта прямая проходит и через середину B_1C_1 .
4. Назовём число безнулёвым, если в его десятичной записи нет нулей, в противном случае, назовём его нулёвым. Пусть a_n и b_n — количество нулевых и безнулевых чисел от 1 до n . Верно ли, что при любом натуральном k существует n , для которого $a_n/b_n = k$?
5. Натуральные числа a, b и n таковы, что $ab(a+b)^{n-1}$ делится на $a^n + b^n$. Докажите, что если a и n чётны, а b нечётно, то $a^n + b^n$ делится на $(n+1)$ -ю степень некоторого простого числа.
6. Алиса и Эльдар играют в игру. В начале на доске написаны 5000 нулей и 5000 единиц. За один ход можно стереть с доски два числа и записать вместо них на доску их среднее арифметическое. Алиса делает 2500 ходов подряд, затем Эльдар делает ходы, пока на доске не останется всего два числа. Если эти два числа равны, Эльдар выигрывает, в противном случае выигрывает Алиса. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?
7. Дано натуральное число n . При каком наибольшем k можно покрасить клетки доски $n \times n$ в k цветов таким образом, что для любого цвета A среди всех соседей по стороне у клеток, покрашенных в цвет A , в совокупности встречаются клетки не более, чем двух различных цветов, отличных от A ?
8. Окружность ω_a проходит через ортоцентр H остроугольного треугольника ABC , основание высоты, опущенной на сторону BC , и точку, диаметрально противоположную A на окружности (ABC) . Докажите, что вместе с окружностями ω_b и ω_c , которые определяются аналогично, окружность ω_a имеет общую точку, отличную от точки H .
9. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки D, E и F соответственно, а на отрезке DE выбрана точка X . Отрезки AX, CX, DE, DF, EF, XF делят треугольник ABC на девять частей. Какое наибольшее количество из них может быть площади 1?
10. На большой гирлянде висит 101 лампочка. Каждую секунду некоторые лампочки загораются, а некоторые — гаснут. Дима наблюдает за гирляндой и записывает, сколько лампочек горит. Он заметил, что если в данный момент горит k лампочек, то к следующей секунде ровно k лампочек изменяют свое состояние. Дима наблюдал за гирляндой 52 секунды. Могут ли все числа, записанные Димой, быть различными?